２００３年1月１６日
金　融　論
嶋田　健

「モンテカルロ法によるオプションプライシング」講義ノート[1]

１．はじめに

・モンテカルロ法によるシミュレーションの適用

①　金融派生商品（以下、派生商品）のプライシング

②　オプションのポートフォリオや与信のポートフォリオのリスク量計算

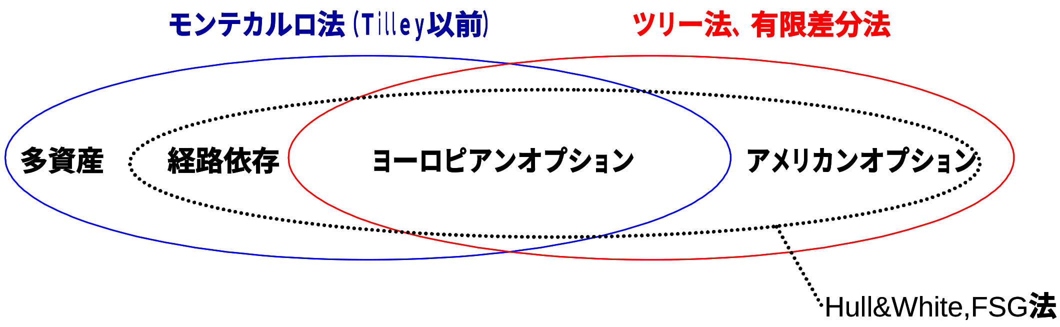
③　保有期間のポートフォリオ構成の変化を前提としたリスク量の算出

↓

以上の算出にはモンテカルロ法が必須である。

（参考）

オプションプライシングと商品の関係



湯前、鈴木（2000）

→　単純なヨーロピアンオプションについては、モンテカルロ法、ブラック・ショールズ式の解析解、ツリー法、有限差分法等によりプライシングが可能であり、各方法による結果はほぼ同じ値となる。

・パソコンの処理速度の向上

以前はスーパーコンピューターなどを必要としたため、金融分野での利用に限りがあった。

・モンテカルロ法の実装法の妥当性の検討の視点

①　生成した一様乱数の性質の検討

[1] 本ノートは、石川・内田（２００２）に基づくものです。

「十分にランダムな」数列とは

ア．独立性（周期性）

イ．一様性・・・検定方法は χ^2 統計量などがある。

の条件が満たされている時、「疑似乱数」と呼ぶことが多い。

特に、コンピューター上で、一定のアルゴリズムに従って算出する乱数にはどうしても規則性が出てしまう。

↓

様々な手法の検討が繰り替えとされている。

（例）線形合同法、シフトレジスター法など

①’一様乱数から目的の乱数への変換方法の検討

（金融に関する目的の乱数とは）

ア．正規分布・・・オプションのプライシング、VaR など

イ．ロジスティック分布・・・倒産／非倒産の２値モデル

ウ．ワイブル分布・・・会社の寿命モデル

エ．パレート分布・・・高値が高値を呼ぶ高騰期の株価

オ．コーシー分布・・・正規分布と比べて裾の部分が厚く（$FatTail$）、株価や為替相場の分析に利用

②　多次元正規乱数の生成方法の検討

後述のコレスキー分解だけでは、十分な精度が得られないため、モーメント調整法により生成された乱数を調整する。

③　期待値演算とパーセント点演算における誤差削減手法の検討

④　適切な実装法の検討

２．モンテカルロ法に関する基本事項

（１）モンテカルロ法の定義と実務での適用対象

・モンテカルロ法とは

①　（広義）乱数を取り扱う技法の手法

②　（金融実務）乱数を何度も繰り返し用いてシミュレーションを行い、多数の実験結果から目的とする因子を求めること。

・金融実務での計算対象

①　期待値型　・・・派生商品のプライシング

②　パーセンタイル型　・・・VaR の算出

・計算のアルゴリズム

①　乱数を使って確率変数（原資産価格の変化など）を表現

（例）幾何ブラウン運動に従う株価 $S(t)$ は、

$$dS = rSdt + \sigma Sdz$$

上記式を時間区間［０，Ｔ］を長さΔｔで分割し、シミュレーションできる式に転換すると、

$$S(t_k + \Delta t) = S(t_k) + rS(t_k)\Delta t + \sigma S(t_k)\varepsilon(t_k)$$

②　生成された乱数を代入して確率変数（派生商品の価値やポートフォリオの損益）の実現値を計算する。

区間を８０に分割し、株価の初期値を１００００万円、標準偏差を２０％、利子率１０％、期間６ヵ月とすると（Δt＝６／１２／８０＝０．０６２５）、

$$S(t_{k+1}) = 10000 + 0.1 \times 10000 \times 0.00625 + 0.2 \times 10000 \times \varepsilon(t_k) \times \sqrt{0.00625}$$

$$S(t_{k+2}) = S(t_{k+1}) + 0.1 \times S(t_{k+1}) \times 0.00625 + 0.2 \times S(t_{k+1}) \times \varepsilon(t_{k+1}) \times \sqrt{0.00625}$$

この計算を８０回繰り返し、Ｔ時における株価からペイオフ$\max(S_T - K, 0)$を算出し、現在価値へと割り引く（具体的な割引ファクターは$e^{-\frac{6}{12}\times 0.1}$）。

→　ここで、区間の分割が十分に大きければ、大数の法則により精度が上がる。

③　確率変数の実現値を集計

上記計算をさらに繰り返し、実現値の平均を算出する。回数を大きくすれば、精度が上昇する（中心極限定理）。

（参考）Ｄ．Ｇ．ルーエンバーガー（２００２）

（２）数値計算における誤差

・モンテカルロ法による誤差

ランダムな乱数を数多く用意すれば、推定誤差を小さくすることができる。

↓

もっとも、試行回数が多いほど、計算時間が長くなるという実務上の問題が生じる。

↓

実務上では、有限回数の試行で計算を停止する。

↓

真の値≠計算結果

↓

誤差の評価が重要となる。

・コンピューターの数値計算の誤差

①　打ち切り誤差

② 丸め誤差

③ 情報落ちの誤差

④ 桁落ち誤差

⑤ オーバーフロー、アンダーフロー

・打ち切り誤差の特性

① 期待値型、パーセンタイル型では誤差の大きさが異なる。

（９９％誤差＜絶対値＞の計算方法）

ア．期待値型

試行回数 n、９９％信頼区間 $z=2.33$、標準偏差 $\sigma=1$

$$９９\%誤差=\frac{z\sigma}{\sqrt{n}}$$

イ．パーセンタイル型

② 目標とする精度にあわせて試行回数を決定

（３）誤差削減のための工夫

・分散減少法の留意点

① 分散減少法の誤差減少法は問題とする対象に依存する。

② 分散減少法の多くは、期待値型計算の誤差を減少させる技術であり、それをそのままパーセンタイル型計算に適用できる保証はないこと。

３．一様乱数の統計的独立性の検証

・モンテカルロ法の実務におけるステップ

① 一様乱数を生成

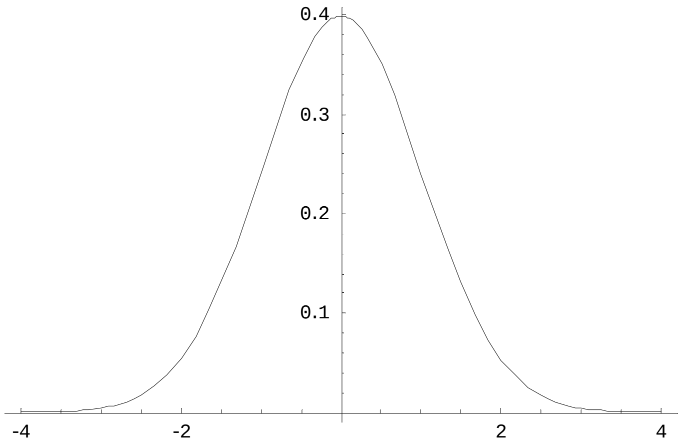
② 一様乱数を標準正規乱数に変換

③ 正規乱数を多次元正規乱数に変換

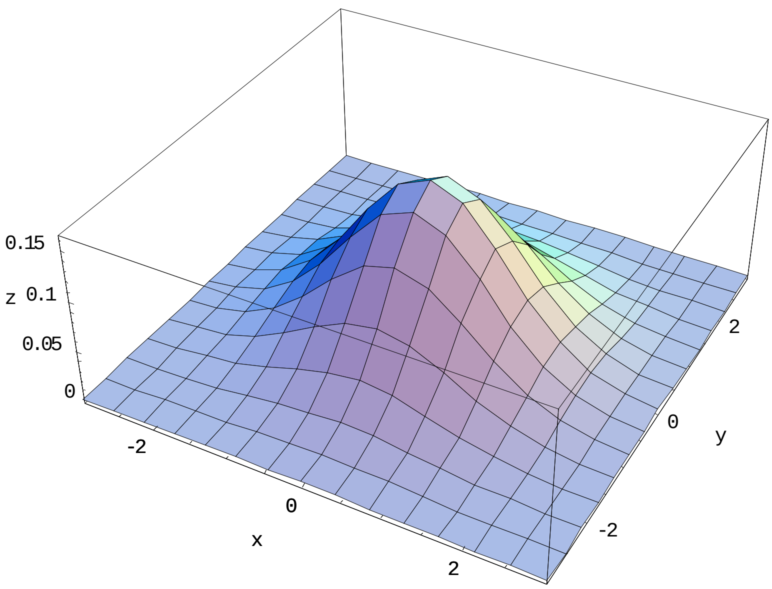
④ 生成した多次元正規乱数を使用し、原資産価格を発生させ派生商品価格を計算

⑤ サンプルの平均値、もしくはサンプルのα点を求める。

②→③



（平均０、分散１）の標準正規分布



（平均ベクトルμ、分散共分散行列Σ）の多次元正規乱数

（1）乱数の周期と Excel の組み込み乱数

・コンピューターで生成される乱数の特性

① 周期性がある。

モンテカルロ法を利用する場合、同じ乱数列で計算しても同じ結果をもたらすだけであるため、試行しても意味がない。つまり、十分長い周期を持った乱数でなければ、精度をあげることができない。

② 周期はソフトウェアによって異なる。

ア．Excelの分析ツール（周期2^{15}）

イ．ワークシート上で利用できる Rand 関数（同2^{20}以下）

ウ．VisualBasic で利用できる Rnd 関数（同2^{24}）

エ．現Ｃ言語標準乱数 Random（2^{62}）

オ．メルセンヌ・ツイスター法（2^{19937}）

（注）上記乱数の発生方法は、イ～ウが線形合同法、エ～オはシフトレジスター法

（2）メルセンヌ・ツイスター法と乱数の統計的独立性

・周期が長い

長い周期を持つことで、統計的独立性が高く、多次元の乱数ベクトルの生成に有用である。

（3）メルセンヌ・ツイスター法と線形合同法の比較と多次元（疎）結晶構造

・線形合同法とは

（算出式）

$$x_{n+1} = ax_n + c \quad Mod\ M$$

（簡単な例）

$a = 3$、$x_1 = 1$、$c = 0$、$M = 7$とすると、

乱数列は、$\{1,3,2,6,4,5,1,3,2,6,4,5...\}$となり、周期６（＝７－１）の乱数が生成できる。

ここで、aがM（法という）の原始根ならば、最大周期$M-1$を得ることができる

（参考）

７０～９０年代までのＣ言語の標準疑似乱数だった rand の場合

$a = 1103515245$、$c = 12345$、$M = 2^{31}$で、最大周期$2^{31}-1$

・シフトレジスター法

線形合同法では、最大周期は2^{32}が限度である。これは、現在のコンピューターの処理が３２ビット単位で行われており、３２ビットより大きい単位の計算には非常に時間を要することに起因する。

・線形合同法と多次元疎結晶

４．多次元正規乱数列の生成方法とモーメント調整法

・「一様乱数→１次元正規乱数」のステップ

① 逆関数法

標準一様乱数 u [0,1]とすれば、標準正規分布の分布関数は、

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$$

と表され、逆関数 $\Phi^{-1}(x)$ を使用し、正規乱数を得る。

② ボックス・ミュラー法

[0,1]の標準一様乱数 ξ_1、ξ_2 ２個から、

$$\eta_1 = \sqrt{(-\log \xi_1)} \cos 2\pi \xi_2$$

$$\eta_2 = \sqrt{(-\log \xi_1)} \sin 2\pi \xi_2$$

２個の独立な正規乱数 η_1、η_2（平均値０、分散１）を得る。

③ 中心極限法

（１）多次元正規乱数列の生成方法とモーメント調整法

・「１次元正規乱数→多次元正規乱数」のステップ

上記ステップにより得られた１次元標準正規乱数列 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ を、コレスキー分解を用いて一般の多次元正規乱数に変換する。

・コレスキー分解とは

野村證券金融研究所（２００１）より

「リスク資産の価格は確率変数で表される。通常多資産問題ではそれらは互いに相関しあっている。それらを無相関な確率変数に変換して取り扱いたいときにあらわれる行列の分解法に一種。

非退化的な実対称行列Ａは適当な下三角行列Ｌによって、

$$A = LL^T$$

と分解可能である。これをコレスキー分解という。」

・コレスキー分解の手順

① 行列が正値対称行列（注）であること。

（注）ベクトル x に対して、$x^t Ax > 0$ が成り立つ行列Ａという。

② 具体的な例

コレスキー分解する正値対称行列 a_{ij}、上三角行列 u_{ij} とすると、

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}} \qquad (2 \le j \le n)$$

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2} \qquad (2 \le i \le n)$$

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}) \qquad (i+1 \le j \le n, 2 \le i \le n)$$

$$u_{ij} = 0 \qquad (i > j)$$

（参考文献）

湯前祥二、鈴木輝好『モンテカルロ法の金融工学への応用』（２０００）、朝倉書店。

Ｄ．Ｇ．ルーエンバーガー著、今野浩訳『金融工学入門』（２００２）、日本経済新聞社。

Ｊ．Ｄ．ハル著、東京三菱銀行金融商品開発部訳『フィナンシャルエンジニアリング』（２００２）、きんざい。

Ｎ．Ｄ．ピアソン著、山下恵美子訳『リスクバジェッティングのためのＶａＲ』（２００３）、PanRolling。

箕谷千凰彦『すぐに役立つ統計分布』（１９９８）、東京図書。

松本眞、西村拓士「間違いだらけの疑似乱数選び」（http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/）。

東京大学教養学部統計学教室編『自然科学の統計学』（１９９２）、東京大学出版会。

津田孝夫『モンテカルロ法とシミュレーション』（１９６９）、倍風館。

木島正明他『ファスナンス工学入門　第III部　数値計算法』（１９９６）、日科技連。

野村證券金融研究所『金融工学事典』（２００１）、東洋経済新報社。

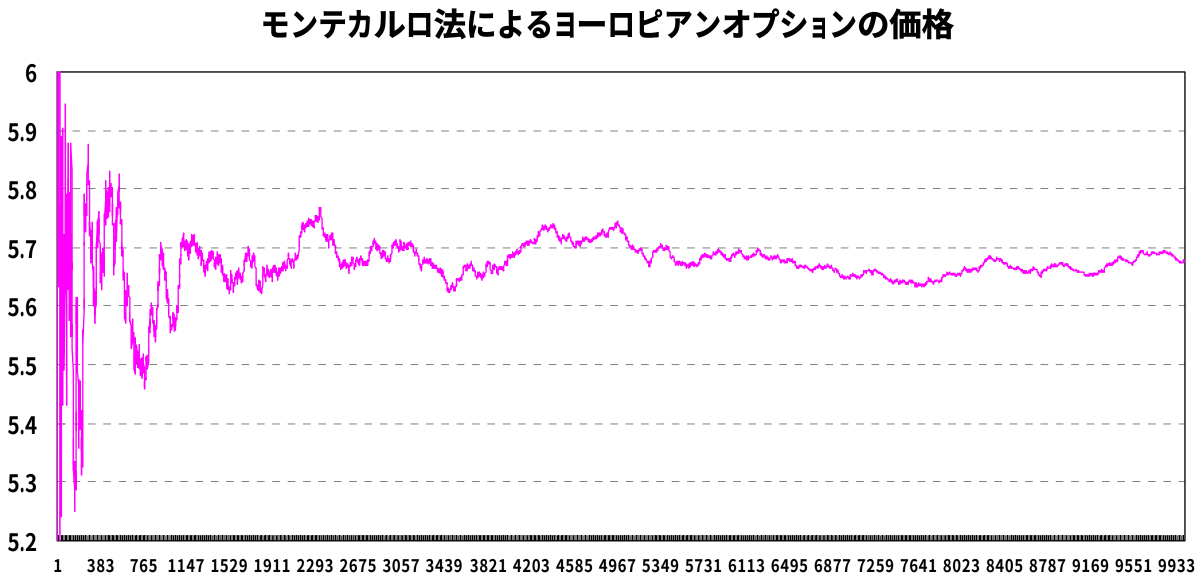
Hamilton,Hamilton D. *Time Series Analysis* 1994. Princeton University Press。

長島秀世『数値計算』（１９７９）槇書店。

石川達也、内田善彦「モンテカルロ法によるプライシングとリスク量の計算について」（２００２）、日本銀行金融研究所。

（資料）

①　モンテカルロ法によるヨーロピアンオプションのプライシング



注）対象のヨーロピアンオプションの内容は以下の通り。
期間5ヵ月、原資産の株式の現在の価格は62ドル、ボラティリティは年間20％、
利子率は10％、権利行使価格は60ドル。

②　ブラックーショールズ式による算出

$$d_1 = \frac{\ln(62/60) + (0.1 + 0.2^2/2) \times (5/12)}{0.2\sqrt{5/12}} = 0.641287$$

$$d_2 = d_1 - 0.2\sqrt{5/12} = 0.512188$$

$N(d_1) = 0.739332$、 $N(d_2) = 0.695740$

$C = 62 \times d_1 - 60 \times 0.95918 \times d_2 = 5.798$